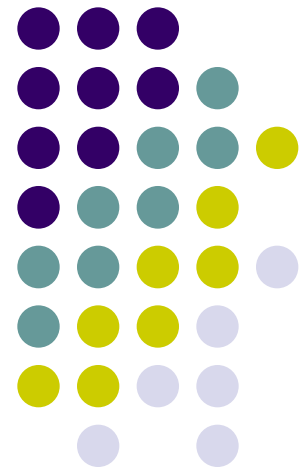
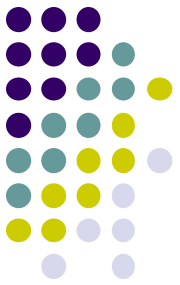


Fundamentos da Computação 1

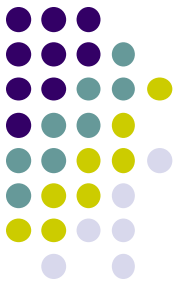




Conteúdo

- Criando novas equivalências.
- Resolvendo questões lógicas com o método dedutivo.

Aplicando Equivalências Lógicas

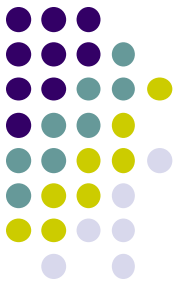


$$\sim(p \rightarrow q)$$

Aplicar a propriedade
da condicional

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

Aplicando Equivalências Lógicas



$$\sim(p \rightarrow q) \equiv \sim(\sim p \vee q) \quad \text{Condicional}$$

Aplicar a propriedade
da condicional

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

Aplicando Equivalências Lógicas

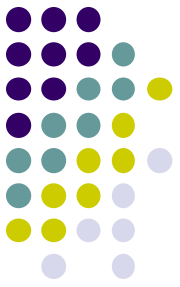


$$\begin{aligned}\sim(p \rightarrow q) &\equiv \sim(\sim p \vee q) && \text{Condicional} \\ &\equiv \sim\sim p \wedge \sim q && \text{De Morgan}\end{aligned}$$

Aplicar a propriedade
de De Morgan

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

Aplicando Equivalências Lógicas



$$\begin{aligned}\sim(p \rightarrow q) &\equiv \sim(\sim p \vee q) && \text{Condicional} \\ &\equiv \sim\sim p \wedge \sim q && \text{De Morgan} \\ &\equiv p \wedge \sim q && \text{Dupla Negação}\end{aligned}$$

Aplicar a propriedade
da Dupla Negação

$$\sim(\sim p) \equiv p$$

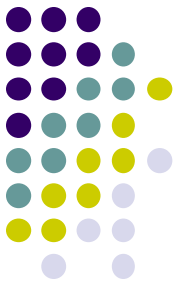
Aplicando Equivalências Lógicas



$$\begin{aligned}\sim(p \rightarrow q) &\equiv \sim(\sim p \vee q) && \text{Condicional} \\ &\equiv \sim\sim p \wedge \sim q && \text{De Morgan} \\ &\equiv p \wedge \sim q && \text{Dupla Negação}\end{aligned}$$

- Concluimos que $\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

Aplicando Equivalências Lógicas



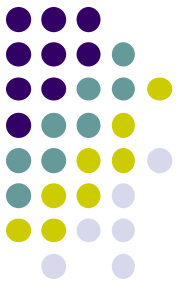
$$\begin{aligned}\sim(p \rightarrow q) &\equiv \sim(\sim p \vee q) && \text{Condicional} \\ &\equiv \sim\sim p \wedge \sim q && \text{De Morgan} \\ &\equiv p \wedge \sim q && \text{Dupla Negação}\end{aligned}$$

- Concluimos que $\sim(p \rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$
- Utilizamos este método, chamado método dedutivo, para demonstrar novas equivalências.



Resolver...

- Mostre que $p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv p \wedge q \rightarrow r$
 - Dica: Aplicar as equivalências na seguinte sequência:
 - Condicional
 - Condicional
 - Associativa
 - De Morgan
 - Condicional



Resolver...

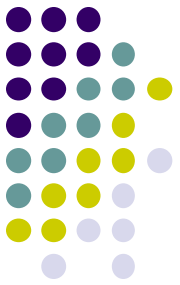
$$p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv p \wedge q \rightarrow r$$

$$p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv \sim p \vee (q \rightarrow r)$$

Propriedade da
Condicional

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

Condicional
Condicional
Associativa
De Morgan
Condicional



Resolver...

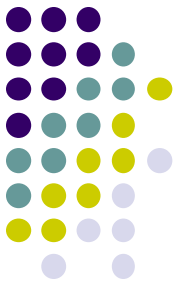
$$p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv p \wedge q \rightarrow r$$

$$p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv \sim p \vee \underline{(q \rightarrow r)}$$

Propriedade da
Condicional

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

Condicional
Condicional
Associativa
De Morgan
Condicional



Resolver...

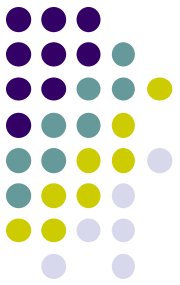
$$p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv p \wedge q \rightarrow r$$

$$\begin{aligned} p \rightarrow (q \rightarrow r) &\equiv \sim p \vee (q \rightarrow r) \\ &\equiv \sim p \vee (\sim q \vee r) \end{aligned}$$

Propriedade da
Condicional

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

Condicional
Condicional
Associativa
De Morgan
Condicional



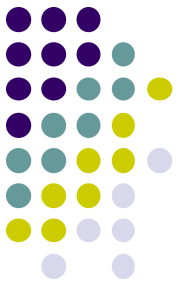
Resolver...

$$p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv p \wedge q \rightarrow r$$

$$\begin{aligned} p \rightarrow (q \rightarrow r) &\equiv \sim p \vee (q \rightarrow r) \\ &\equiv \underline{\sim p \vee (\sim q \vee r)} \end{aligned}$$

Propriedade Associativa
 $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

Condicional
Condicional
Associativa
De Morgan
Condicional



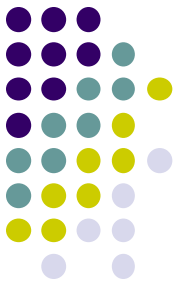
Resolver...

$$p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv p \wedge q \rightarrow r$$

$$\begin{aligned} p \rightarrow (q \rightarrow r) &\equiv \sim p \vee (q \rightarrow r) \\ &\equiv \sim p \vee (\sim q \vee r) \\ &\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee r \end{aligned}$$

Propriedade Associativa
 $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

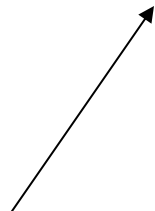
Condicional
Condicional
Associativa
De Morgan
Condicional



Resolver...

$$p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv p \wedge q \rightarrow r$$

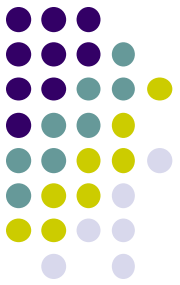
$$\begin{aligned} p \rightarrow (q \rightarrow r) &\equiv \sim p \vee (q \rightarrow r) \\ &\equiv \sim p \vee (\sim q \vee r) \\ &\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee r \end{aligned}$$



Leis de De Morgan

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

Condiciona
Condiciona
Associativa
De Morgan
Condiciona



Resolver...

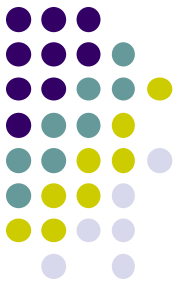
$$p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv p \wedge q \rightarrow r$$

$$\begin{aligned} p \rightarrow (q \rightarrow r) &\equiv \sim p \vee (q \rightarrow r) \\ &\equiv \sim p \vee (\sim q \vee r) \\ &\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee r \\ &\equiv \sim(p \wedge q) \vee r \\ &\equiv \end{aligned}$$

Condicional
Condicional
Associativa
De Morgan
Condicional

Propriedade da Condicional

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$



Resolver...

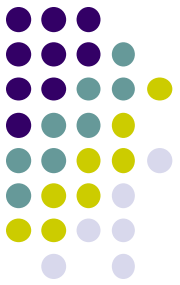
$$p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv p \wedge q \rightarrow r$$

$$\begin{aligned} p \rightarrow (q \rightarrow r) &\equiv \sim p \vee (q \rightarrow r) \\ &\equiv \sim p \vee (\sim q \vee r) \\ &\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee r \\ &\equiv \sim(p \wedge q) \vee r \\ &\equiv (p \wedge q) \rightarrow r \end{aligned}$$

Condiciona
Condiciona
Associativa
De Morgan
Condiciona

Propriedade da Condicional

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$



Resolver...

$$p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv p \wedge q \rightarrow r$$

$$p \rightarrow (q \rightarrow r) \equiv \sim p \vee (q \rightarrow r)$$

$$\equiv \sim p \vee (\sim q \vee r)$$

$$\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee r$$

$$\equiv \sim(p \wedge q) \vee r$$

$$\equiv (p \wedge q) \rightarrow r$$

Condicional

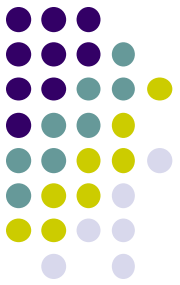
Condicional

Associativa

De Morgan

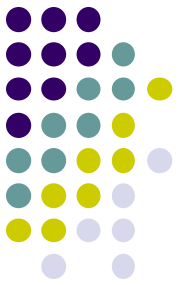
Condicional

Mostramos a equivalência usando o método dedutivo



Resolver ...

- $\sim(p \vee (\sim p \wedge q)) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$
 - De Morgan $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
 - De Morgan $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
 - Dupla Negação $\sim(\sim p) \equiv p$
 - Distributiva $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
 - Negação $p \wedge \sim p \equiv F$
 - Elementos Neutros $p \vee F \equiv p$



Resolver ...

- $\sim(p \vee (\sim p \wedge q)) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$

$$\sim(p \vee (\sim p \wedge q)) \equiv \sim p \wedge \sim(\sim p \wedge q)$$

- De Morgan $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$

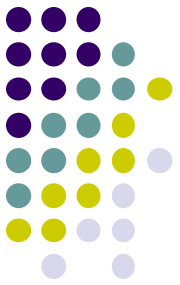
- De Morgan $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

- Dupla Negação $\sim(\sim p) \equiv p$

- Distributiva $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

- Negação $p \wedge \sim p \equiv F$

- Elementos Neutros $p \vee F \equiv p$

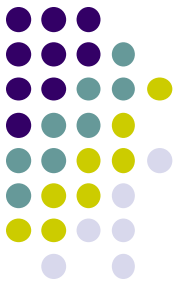


Resolver ...

- $\sim(p \vee (\sim p \wedge q)) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$

$$\sim(p \vee (\sim p \wedge q)) \equiv \sim p \wedge \underline{\sim(\sim p \wedge q)}$$

- De Morgan $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$
- Dupla Negação $\sim(\sim p) \equiv p$
- Distributiva $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- Negação $p \wedge \sim p \equiv F$
- Elementos Neutros $p \vee F \equiv p$

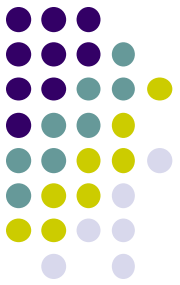


Resolver ...

- $\sim(p \vee (\sim p \wedge q)) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$

$$\begin{aligned}\sim(p \vee (\sim p \wedge q)) &\equiv \sim p \wedge \underline{\sim(\sim p \wedge q)} \\ &\equiv \sim p \wedge \sim\sim p \vee \sim q\end{aligned}$$

- Dupla Negação $\sim(\sim p) \equiv p$
- Distributiva $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- Negação $p \wedge \sim p \equiv F$
- Elementos Neutros $p \vee F \equiv p$

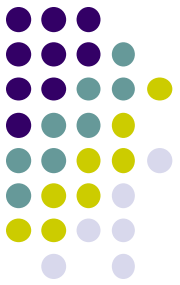


Resolver ...

- $\sim(p \vee (\sim p \wedge q)) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$

$$\begin{aligned}\sim(p \vee (\sim p \wedge q)) &\equiv \sim p \wedge \underline{\sim(\sim p \wedge q)} \\ &\equiv \sim p \wedge \sim\sim p \vee \sim q \\ &\equiv \sim p \wedge p \vee \sim q\end{aligned}$$

- Distributiva $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- Negação $p \wedge \sim p \equiv F$
- Elementos Neutros $p \vee F \equiv p$

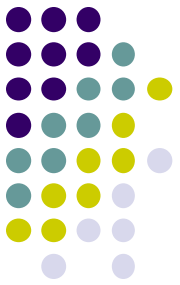


Resolver ...

- $\sim(p \vee (\sim p \wedge q)) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$

$$\begin{aligned}\sim(p \vee (\sim p \wedge q)) &\equiv \sim p \wedge \underline{\sim(\sim p \wedge q)} \\ &\equiv \sim p \wedge \sim\sim p \vee \sim q \\ &\equiv \sim p \wedge (p \vee \sim q) \\ &\equiv (\sim p \wedge p) \vee (\sim p \wedge \sim q)\end{aligned}$$

- Negação $p \wedge \sim p \equiv F$
- Elementos Neutros $p \vee F \equiv p$

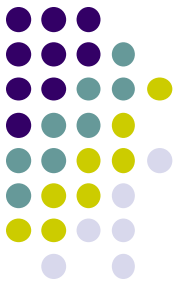


Resolver ...

- $\sim(p \vee (\sim p \wedge q)) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$

$$\begin{aligned}\sim(p \vee (\sim p \wedge q)) &\equiv \sim p \wedge \underline{\sim(\sim p \wedge q)} \\ &\equiv \sim p \wedge \sim\sim p \vee \sim q \\ &\equiv \sim p \wedge (p \vee \sim q) \\ &\equiv (\sim p \wedge p) \vee (\sim p \wedge \sim q) \\ &\equiv F \vee (\sim p \wedge \sim q)\end{aligned}$$

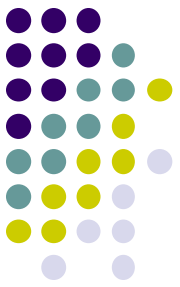
- Elementos Neutros $p \vee F \equiv p$



Resolver ...

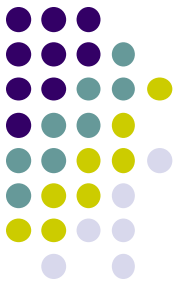
- $\sim(p \vee (\sim p \wedge q)) \equiv (\sim p \wedge \sim q)$

$$\begin{aligned}\sim(p \vee (\sim p \wedge q)) &\equiv \sim p \wedge \underline{\sim(\sim p \wedge q)} \\ &\equiv \sim p \wedge \sim\sim p \vee \sim q \\ &\equiv \sim p \wedge (p \vee \sim q) \\ &\equiv (\sim p \wedge p) \vee (\sim p \wedge \sim q) \\ &\equiv F \vee (\sim p \wedge \sim q) \\ &\equiv (\sim p \wedge \sim q)\end{aligned}$$



Demonstrações

- Podemos utilizar este método também para mostrar que uma fórmula é uma tautologia ou contradição.
- Exemplo:
 - Demonstrar que $(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q)$ é uma tautologia
 - Usaremos: Condicional, De Morgan, Associativa e Comutativa.

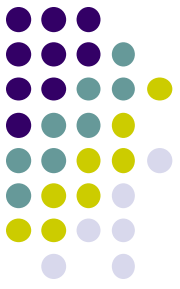


Resolvendo...

$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q) \equiv \sim(p \wedge q) \vee (p \vee q)$ Condicional

Propriedade da Condicional

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

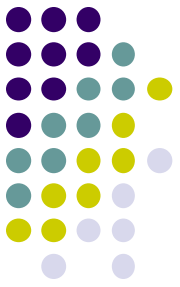


Resolvendo...

$$(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q) \equiv \sim(p \wedge q) \vee (p \vee q) \text{ Condicional}$$
$$\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee (p \vee q) \text{ De Morgan}$$

Leis de De Morgan

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$



Resolvendo...

$$\begin{aligned}(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q) &\equiv \sim(p \wedge q) \vee (p \vee q) && \text{Condiciona} \\ &\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee (p \vee q) && \text{De Morgan} \\ &\equiv \sim p \vee p \vee \sim q \vee q && \text{Comutativa}\end{aligned}$$

Propriedade Associativa

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

Propriedade Comutativa

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

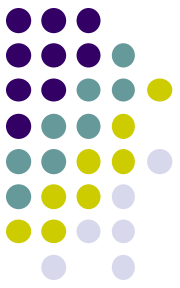


Resolvendo...

$$\begin{aligned}(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q) &\equiv \sim(p \wedge q) \vee (p \vee q) && \text{Condicional} \\ &\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee (p \vee q) && \text{De Morgan} \\ &\equiv \sim p \vee p \vee \sim q \vee q && \text{Comutativa} \\ &\equiv V \vee V && \text{Negação}\end{aligned}$$

Propriedade de Negação

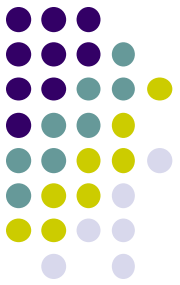
$$p \vee \sim p \equiv V$$



Resolvendo...

$$\begin{aligned}(p \wedge q) \rightarrow (p \vee q) &\equiv \sim(p \wedge q) \vee (p \vee q) && \text{Condicional} \\ &\equiv (\sim p \vee \sim q) \vee (p \vee q) && \text{De Morgan} \\ &\equiv \sim p \vee p \vee \sim q \vee q && \text{Comutativa} \\ &\equiv V \vee V && \text{Negação} \\ &\equiv V\end{aligned}$$

Logo é uma tautologia



Um algoritmo...

...

```
if ((saída>entrada) and not ((saída >entrada)
and (pressão < 1000) ))
```

```
    então x = x +1;
```

```
    senão x = x+2;
```



Um algoritmo...

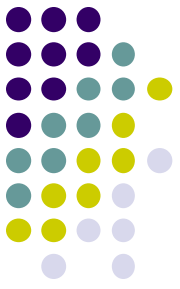
...

```
if ((saída>entrada) and not ((saída >entrada)
and (pressão < 1000)))
```

```
    então x = x +1;
```

```
    senão x = x+2;
```

- p: saída>entrada
- q: pressão < 1000



Um algoritmo...

...

```
if (p and not (p and q))  
    então x = x + 1;  
    senão x = x + 2;
```

- p: saída > entrada
- q: pressão < 1000



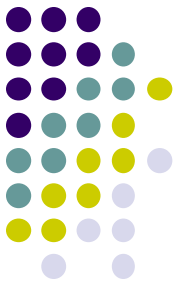
Um algoritmo...

...

```
if (p and not (p and q))  
    então x = x + 1;  
    senão x = x + 2;
```

- p: saída > entrada
- q: pressão < 1000

$$p \wedge \sim(p \wedge q)$$



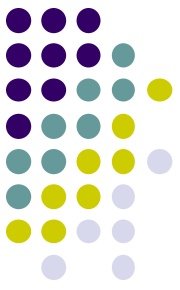
Um algoritmo...

...

```
if (p and not (p and q))  
    então x = x + 1;  
    senão x = x + 2;
```

- p: saída > entrada
- q: pressão < 1000

$p \wedge \sim(p \wedge q)$ De Morgan



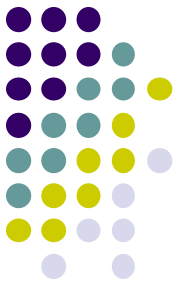
Um algoritmo...

```
...  
if (p and not (p and q))  
    então x = x + 1;  
    senão x = x + 2;
```

- p: saída > entrada
- q: pressão < 1000

$p \wedge \sim(p \wedge q)$ De Morgan

$p \wedge (\sim p \vee \sim q)$ Distributiva



Um algoritmo...

...

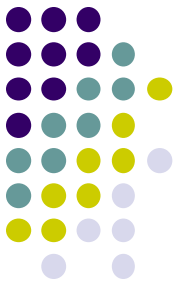
```
if (p and not (p and q))  
    então x = x + 1;  
    senão x = x + 2;
```

- p: saída > entrada
- q: pressão < 1000

$p \wedge \sim(p \wedge q)$ De Morgan

$p \wedge (\sim p \vee \sim q)$ Distributiva

$(p \wedge \sim p) \vee (p \wedge \sim q)$



Um algoritmo...

...
if (p and not (p and q))
 então x = x + 1;
 senão x = x + 2;

- p: saída > entrada
- q: pressão < 1000

$p \wedge \sim(p \wedge q)$ De Morgan

$p \wedge (\sim p \vee \sim q)$ Distributiva

$(p \wedge \sim p) \vee (p \wedge \sim q)$

?



Um algoritmo...

```
...  
if (p and not (p and q))  
    então x = x + 1;  
    senão x = x + 2;
```

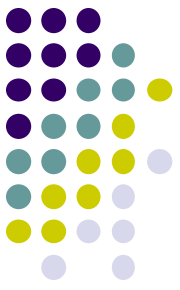
- p: saída > entrada
- q: pressão < 1000

$p \wedge \sim(p \wedge q)$ De Morgan

$p \wedge (\sim p \vee \sim q)$ Distributiva

$(p \wedge \sim p) \vee (p \wedge \sim q)$

Negação



Um algoritmo...

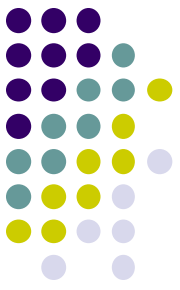
...

```
if (p and not (p and q))  
    então x = x + 1;  
    senão x = x + 2;
```

- p: saída > entrada
- q: pressão < 1000

$p \wedge \sim(p \wedge q)$ De Morgan
 $p \wedge (\sim p \vee \sim q)$ Distributiva
 $(p \wedge \sim p) \vee (p \wedge \sim q)$

F



Um algoritmo...

...

```
if (p and not (p and q))  
    então x = x + 1;  
    senão x = x + 2;
```

- p: saída > entrada
- q: pressão < 1000

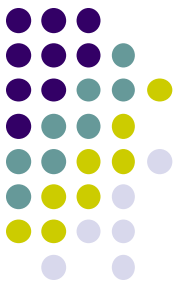
$p \wedge \sim(p \wedge q)$ De Morgan

$p \wedge (\sim p \vee \sim q)$ Distributiva

$(p \wedge \sim p) \vee (p \wedge \sim q)$

$\underbrace{F \vee (p \wedge \sim q)}$

?



Um algoritmo...

...
if (p and not (p and q))
 então x = x + 1;
 senão x = x + 2;

- p: saída > entrada
- q: pressão < 1000

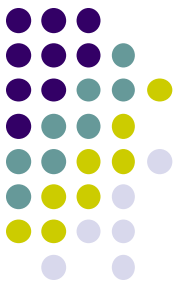
$p \wedge \sim(p \wedge q)$ De Morgan

$p \wedge (\sim p \vee \sim q)$ Distributiva

$(p \wedge \sim p) \vee (p \wedge \sim q)$

$\underbrace{F \vee (p \wedge \sim q)}$

Elementos neutros



Um algoritmo...

...

```
if (p and not (p and q))  
    então x = x +1;  
senão x = x+2;
```

- p: saída > entrada
- q: pressão < 1000

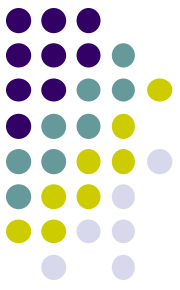
$p \wedge \sim(p \wedge q)$ De Morgan

$p \wedge (\sim p \vee \sim q)$ Distributiva

$(p \wedge \sim p) \vee (p \wedge \sim q)$

$F \vee (p \wedge \sim q)$

$(p \wedge \sim q)$



Um algoritmo...

...

```
if (p and not q)
    então x = x + 1;
senão x = x + 2;
```

- p: saída > entrada
- q: pressão < 1000

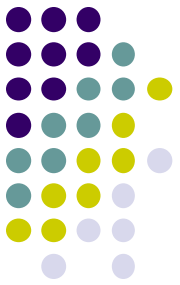
$p \wedge \sim(p \wedge q)$ De Morgan

$p \wedge (\sim p \vee \sim q)$ Distributiva

$(p \wedge \sim p) \vee (p \wedge \sim q)$

$F \vee (p \wedge \sim q)$

$(p \wedge \sim q)$



Um algoritmo...

...

```
if ((saída>entrada)and not  
(pressão < 1000))
```

```
    então x = x +1;
```

```
    senão x = x+2;
```

- p: saída>entrada
- q: pressão < 1000

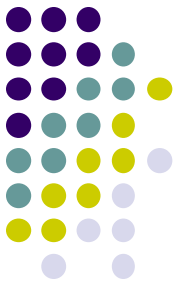
$p \wedge \sim(p \wedge q)$ De Morgan

$p \wedge (\sim p \vee \sim q)$ Distributiva

$(p \wedge \sim p) \vee (p \wedge \sim q)$

$F \vee (p \wedge \sim q)$

$(p \wedge \sim q)$



Um algoritmo...

...

```
if ((saída>entrada) and not ((saída >entrada)
and (pressão < 1000) ))
```

```
    então x = x +1;
```

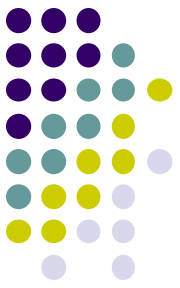
```
    senão x = x+2;
```

...

```
if ((saída>entrada)and not (pressão < 1000))
```

```
    então x = x +1;
```

```
    senão x = x+2;
```



Exercícios

1) Mostre que $p \rightarrow p \vee q$ é uma tautologia

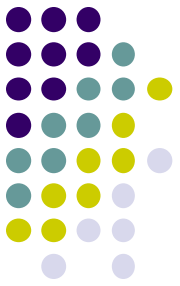
- Dica: condicional; associativa; negação, dominação.

2) Mostre que $p \rightarrow q \equiv p \vee q \rightarrow q$

- Dica: partir da proposição maior. Condicional; De Morgan; Distributiva; Negação; Elemento Neutro; Condicional.

3) Mostre que $(p \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow \sim q) \equiv \sim p$

- Dica: Condicional; Distributiva; Negação; Elemento Neutro.



Exercícios

1) Demonstre que as proposições são tautológicas usando o método dedutivo.

$$(p \rightarrow p) \vee (p \rightarrow \sim p)$$

$$(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$$

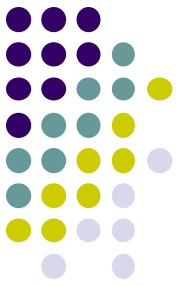
$$(p \rightarrow q) \wedge \sim q \rightarrow \sim p$$

$$(p \vee q) \wedge \sim p \rightarrow q$$

$$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge r \rightarrow q)$$

$$p \wedge q \rightarrow p$$

$$p \rightarrow (q \rightarrow p)$$



Exercícios

2) Demonstre as equivalências usando o método dedutivo.

$$\sim(p \vee q) \vee (\sim p \wedge q) \equiv \sim p$$

$$(p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \equiv p \vee q \rightarrow r$$

$$(p \rightarrow q) \rightarrow q \equiv p \vee q$$

$$(p \rightarrow q) \wedge \sim q \equiv \sim(p \vee q)$$

$$(p \rightarrow q) \wedge p \equiv p \wedge q$$

$$(p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r) \equiv p \wedge q \rightarrow r$$

$$(p \rightarrow q) \vee (p \rightarrow r) \equiv p \rightarrow q \vee r$$